Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου
1ο Διαγώνισμα διάρκειας 3 ωρών στις
Συναρτήσεις – Όρια –Συνέχεια συνάρτησης

Οκτώβριος 2016

Θέμα Α

Α 1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν για μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α.

β) Αν για μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) \geq \alpha$ για κάθε $x \in A$, τότε η f έχει ελάχιστο το Α.

γ) Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής και 1-1, τότε είναι γνησίως μονότονη.

δ) Για κάθε πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = \pm\infty$.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει, τότε δεν υπάρχουν και τα $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

στ) Αν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ δεν υπάρχουν, τότε δεν υπάρχει και το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x) + g(x)\right]$.

ζ) Το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 εξαρτάται από την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό.

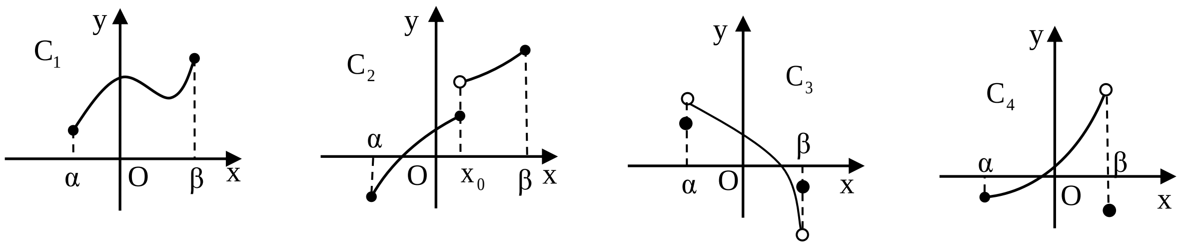
η) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$.

θ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

ι) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε το σύνολο τιμών της δεν μπορεί να είναι της μορφής $[\gamma, \delta)$.

μονάδες 10x1

Α 2. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τεσσάρων συναρτήσεων. Να γράψετε σε κάθε μία ποιες από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano ισχύουν και ποιες όχι. Ακόμη να αναφέρεται πόσες ρίζες έχει η καθεμία από τις συναρτήσεις αυτές. Να Δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



μονάδες 4x4

Θέμα Β

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^2(x) - x^6 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β 1. Να βρείτε όλους τους δυνατούς τύπους της f. μονάδες 4

Έστω $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

Β 2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. μονάδες 5

Β 3. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}. Στη συνέχεια να κάνετε τη γραφική τους παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων. μονάδες 4

Β 4. Να υπολογίστε τα όρια: μονάδες 6

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{f(x)}-1}$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{-f(x)}\eta\mu f(x)\right]$

Β 5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\rho\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f^2(\rho)+f(\rho)+2\rho^4=3\rho^5+7\rho^2-14\rho+8$. μονάδες 5

Θέμα Γ

Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $(g\circ f)(x)=x^3+3x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Γ 1. Να δείξετε ότι η $g\circ f$ είναι αντιστρέψιμη. μονάδες 4

Γ 2. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη. μονάδες 4

Γ 3. Να λύσετε την εξίσωση $f^3(x^3)+3f(x^3)=f^3(x)+3f(x)$. μονάδες 6

Γ 4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(g\circ f)^{-1}(x)-1}{x-5}$. μονάδες 5

Γ 5. Να βρείτε τις συναρτήσεις f,g να ισχύει ότι $(g\circ f\circ f)(x)=e^{3x}+3e^x+1$. μονάδες 6

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\ln x+x}{\sqrt{y^2+2y+2}-y}$.

Δ 1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln x+x,\ x>0$. μονάδες 5

Δ 2. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\ln x=1821-x$. μονάδες 4

Δ 3. Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta>0$ με $\alpha<\beta$ ισχύει ότι $\alpha e^{\alpha}<\beta e^{\beta}$. μονάδες 5

Δ 4. Να λύσετε την εξίσωση $\ln x+x=e^{1-x-\ln x}$. μονάδες 6

Δ 5. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\eta\mu(\ln x+x)+\ln\left(xe^x\right)\right]=+\infty$ μονάδες 5

Καλή επιτυχία!

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύσεις

Θέμα Α

Α 1. α) Λ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ **στ)** Λ **ζ)** Λ **η)** Λ **θ)** Σ **ι)** Σ

Α 2. Η C_1 είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, όμως $f(\alpha)>0$, $f(\beta)>0$ δηλαδή $f(\alpha)f(\beta)>0$ και γι αυτό δεν ισχύει το Θ.Β. Επειδή η C_1 δεν τέμνει τον x΄x, η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζες στο (α,β).

Η C_2 δεν είναι συνεχής στο $x_0\in(\alpha,\beta)$, οπότε δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Όμως $f(\alpha)f(\beta)<0$ αφού $f(\alpha)<0$ και $f(\beta)>0$. Η C_2 τέμνει τον x΄x σε ένα σημείο, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ρίζα στο (α,β).

Η C_3 δεν είναι συνεχής στα α και β, οπότε δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.Όμως $f(\alpha)f(\beta)<0$ αφού $f(\alpha)>0$ και $f(\beta)<0$. Η C_3 τέμνει τον x΄x σε ένα σημείο, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ρίζα στο (α,β).

Η C_4 δεν είναι συνεχής στο β, οπότε δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή $f(\alpha),f(\beta)<0$ είναι $f(\alpha)f(\beta)>0$.Η C_4 τέμνει τον x΄x σε ένα σημείο, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ρίζα στο (α,β).

Θέμα Β

Β 1. $f^2(x)-x^6=0\Leftrightarrow f^2(x)=x^6$

Για κάθε $x\neq 0$ είναι $x^6\neq 0\Rightarrow f^2(x)\neq 0\Leftrightarrow f(x)\neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Άρα $f^2(x)=x^6\Leftrightarrow f(x)=\pm x^3$.

Οι δυνατοί τύποι της f είναι:

$$f(x)=x^3,\ x\in\mathbb{R} \text{ ή } f(x)=-x^3,\ x\in\mathbb{R} \text{ ή } f(x)=\begin{cases}x^3 &, x\geq 0\\ -x^3, & x<0\end{cases} \text{ ή } f(x)=\begin{cases}-x^3, & x\geq 0\\ x^3 &, x<0\end{cases}$$

Β 2. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε: $x_1^3<x_2^3\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$f(x)=y\Leftrightarrow x^3=y$

Αν $y\geq 0$ τότε $x=\sqrt[3]{y}$, ενώ αν $y<0$ τότε $x=-\sqrt[3]{-y}$, άρα $f^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt[3]{y} &, y\geq 0\\ -\sqrt[3]{-y}, & y<0\end{cases}$, οπότε

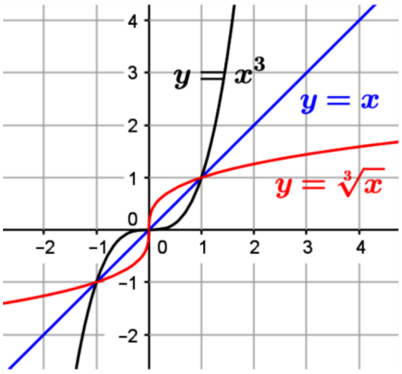
$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x} &, x\geq 0\\ -\sqrt[3]{-x}, & x<0\end{cases}.$$

Β 3. Για $x\geq 0$: $f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x^3=\sqrt[3]{x}\Leftrightarrow x^9=x\Leftrightarrow x^9-x=0\Leftrightarrow$ $x(x^8-1)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$ ή $x=-1$ που απορρίπτεται.

Για $x<0$:

$f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x^3=-\sqrt[3]{-x}\Leftrightarrow x^9=x\Leftrightarrow x^9-x=0\Leftrightarrow x(x^8-1)=0\Leftrightarrow$

$x=0$ απορρίπτεται ή $x=1$ απορρίπτεται ή $x=-1$ δεκτή.



Β 4. α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{f(x)}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{x-1}\underset{x\to 1\Rightarrow u\to 1}{\overset{\substack{\sqrt[6]{x}=u\Rightarrow x=u^6\\ \sqrt[3]{x}=u^2\\ \sqrt{x}=u^3}}{=}}\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{u^2+u^3-2}{u^6-1}=$

$$\lim_{u\to 1}\frac{\cancel{(u-1)}\left(u^2+2u+2\right)}{\cancel{(u-1)}\left(u^5+u^4+u^3+u^2+u+1\right)}=\frac{5}{6}$$

β) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)}\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to 0}}{\overset{\frac{1}{f(x)}=u}{=}}\lim_{u\to 0}\left(\frac{1}{u}\eta\mu u\right)=\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{-f(x)}\eta\mu f(x)\right]\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty} e^{-u}\eta\mu u$

Είναι $\left|e^{-u}\eta\mu u\right|=e^{-u}\left|\eta\mu u\right|\le e^{-u}\Leftrightarrow -e^{-u}\le e^{-u}\eta\mu u\le e^{-u}$. Επειδή $\lim\limits_{u\to+\infty} e^{-u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(-e^{-u}\right)=0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{u\to+\infty} e^{-u}\eta\mu u=0$

Β 5. $f^2(\rho)+f(\rho)+2\rho^4=3\rho^5+7\rho^2-14\rho+8$

Αντικαθιστώντας όπου ρ το x, η εξίσωση γίνεται:

$f^2(x)+f(x)+2x^4=3x^5+7x^2-14x+8\Leftrightarrow x^6+x^3+2x^4-3x^5-7x^2+14x-8=0$

Έστω $g(x)=x^6-3x^5+2x^4+x^3-7x^2+14x-8,\ x\in[1,2]$.

Είναι $g(1)=1-3+2+1-7+14-8=0$, $g(2)=64-96+32+8-28+28-8=0$

Με χρήση του σχήματος Horner η g γίνεται: $g(x)=(x-1)(x-2)\left(x^4+x-4\right)$

Έστω $h(x)=x^4+x-4,\ x\in[1,2]$. Είναι $h(1)=-2<0,\ h(2)=14>0$ δηλαδή $h(1)h(2)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής ως πολυωνυμική, υπάρχει $\rho\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $h(\rho)=0$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε το ρ είναι η μοναδική της ρίζα.

Είναι $g(x)=(x-1)(x-2)h(x)$ και $g(\rho)=(\rho-1)(\rho-2)h(\rho)=0$.

Θέμα Γ

Γ 1. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)\Leftrightarrow x_1^3+3x_1+\cancel{1}=x_2^3+3x_2+\cancel{1}\Leftrightarrow$

$x_1^3-x_2^3+3x_1-3x_2=0\Leftrightarrow(x_1-x_2)\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)+3(x_1-x_2)=0\Leftrightarrow$

$(x_1-x_2)\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+3\right)=0\Leftrightarrow x_1=x_2$ ή $x_1^2+x_1x_2+x_2^2+3=0$ (1)

Η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού ως προς x_1 με $\Delta = x_2^2 - 4(x_2^2+3) = -3x_2^2 - 12 < 0$ οπότε είναι αδύνατη. Επειδή για $(g\circ f)(x_1) = (g\circ f)(x_2)$ είναι $x_1 = x_2$, η $g\circ f$ είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Γ 2. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Leftrightarrow$

$(g\circ f)(x_1) = (g\circ f)(x_1) \overset{g\circ f\ 1-1}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2$. Άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Γ 3. $f^3(x^3) + 3f(x^3) = f^3(x) + 3f(x) \Leftrightarrow f^3(x^3) + 3f(x^3) + 1 = f^3(x) + 3f(x) + 1 \Leftrightarrow$

$g(f(x^3)) = g(f(x)) \Leftrightarrow (g\circ f)(x^3) = (g\circ f)(x) \overset{g\circ f\ 1-1}{\Leftrightarrow} x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow$

$x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Γ 4. Έστω $(g\circ f)^{-1}(x) = u$ τότε $x = (g\circ f)(u)$.

Όταν $x \to 5$ τότε $(g\circ f)(u) \to 5$. Όμως $(gof)(1) = 5 \overset{gof\ \text{συνεχής}}{\Leftrightarrow} \lim_{u\to 1}(g\circ f)(u) = 5$ άρα $u \to 1$.

$$\text{Τότε: } \lim_{x\to 5}\frac{(g\circ f)^{-1}(x) - 1}{x-5} = \lim_{u\to 1}\frac{u-1}{(g\circ f)(u) - 5} = \lim_{u\to 1}\frac{u-1}{u^3+3u+1-5} = \lim_{u\to 1}\frac{u-1}{u^3+3u-4} =$$

$$\lim_{u\to 1}\frac{\cancel{u-1}}{\cancel{(u-1)}(u^2+u+4)} = \frac{1}{6}$$

Γ 5. $(g\circ f\circ f)(x) = e^{3x} + 3e^x + 1 \Leftrightarrow (g\circ f)(f(x)) = (g\circ f)(e^x) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = e^x$

$f(x) = y \Leftrightarrow e^x = y > 0 \Leftrightarrow x = \ln y$. Τότε:

$g(f(x)) = x^3 + 3x + 1 \Leftrightarrow g(y) = \ln^3 y + 3\ln y + 1,\ y > 0$, άρα $g(x) = \ln^3 x + 3\ln x + 1,\ x > 0$

Θέμα Δ

Δ 1.
$$f(x) = \lim_{y\to+\infty}\frac{\ln x + x}{\sqrt{y^2+2y+2} - y} = \lim_{y\to+\infty}\frac{(\ln x + x)\left(\sqrt{y^2+2y+2} + y\right)}{\left(\sqrt{y^2+2y+2} - y\right)\left(\sqrt{y^2+2y+2} + y\right)} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \lim_{y\to+\infty}\frac{(\ln x + x)\left(y\sqrt{1+\frac{2}{y}+\frac{2}{y^2}} + y\right)}{\cancel{y^2} + 2y + 2 - \cancel{y^2}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{(\ln x + x)\cancel{y}\left(\sqrt{1+\cancel{\frac{2}{y}}^{0}+\cancel{\frac{2}{y^2}}^{0}} + 1\right)}{\cancel{y}\left(2+\cancel{\frac{2}{y}}^{0}\right)} =$$

$$\frac{\cancel{2}(\ln x + x)}{\cancel{2}} = \ln x + x$$

Δ 2. $\ln x = 1821 - x \Leftrightarrow \ln x + x = 1821 \Leftrightarrow f(x) = 1821$.

Έστω $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$, τότε $\ln x_1 < \ln x_2$ και $\ln x_1 + x_1 < \ln x_2 + x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow$ f γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(\ln x + x) = +\infty + \infty = +\infty$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(\ln x + x) = -\infty + 0 = -\infty$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = (0, +\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών:

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Επειδή $1821\in f(A)$, υπάρχει $x_0\in A$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=1821$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, το x_0 είναι μοναδικό.

Δ 3. $\alpha e^{\alpha}<\beta e^{\beta}\Leftrightarrow\frac{e^{\alpha}}{e^{\beta}}<\frac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow e^{\alpha-\beta}<\frac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow\alpha-\beta<\ln<\frac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow\alpha-\beta<\ln\beta-\ln\alpha\Leftrightarrow$

$\ln\alpha+\alpha<\ln\beta+\beta\Leftrightarrow f(\alpha)<f(\beta)$ που ισχύει αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και $\alpha<\beta$

Δ 4. Επειδή $e^{1-x-\ln x}>0$ για κάθε $x>0$, έχουμε:

- Αν $\ln x+x\le0\Leftrightarrow f(x)\le0$ Η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $\ln x+x>0\Leftrightarrow f(x)>0$ η εξίσωση γίνεται:

$\ln x+x=e^{1-x-\ln x}\Leftrightarrow\ln(\ln x+x)=1-(x+\ln x)\Leftrightarrow\ln f(x)+f(x)=1\Leftrightarrow$

$f(f(x))=f(1)\overset{f\nearrow\Rightarrow1-1}{\Leftrightarrow}f(x)=1=f(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=1$. Επειδή $f(1)=1>0$ η $x=1$ είναι δεκτή λύση.

Δ 5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\eta\mu(\ln x+x)+\ln\left(xe^{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\eta\mu f(x)+\ln x+\ln e^{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\eta\mu f(x)+\ln x+x\right]=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\eta\mu f(x)+f(x)\right]\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\u\to+\infty}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}(\eta\mu u+u)=\lim\limits_{u\to+\infty}\left[u\left(\frac{\eta\mu u}{u}+1\right)\right]=+\infty(0+1)=+\infty$ γιατί

$\left|\frac{\eta\mu u}{u}\right|=\frac{|\eta\mu u|}{|u|}\le\frac{1}{|u|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|u|}\le\frac{\eta\mu u}{u}\le\frac{1}{|u|}$. Είναι $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(-\frac{1}{|u|}\right)=0=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{|u|}$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\eta\mu u}{u}=0$.